Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA-1112)
Abril-Julio 2008

Nombre: ______________________________

Carné: ______________ Sección: _____

2^{do} Examen Parcial (30 %)
Duración: 1h 50min
Tipo A

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. (6 puntos) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de $y = 0$ la región comprendida entre las gráficas $y = |x - 3|$, $y = 6 - (x - 3)^2$.

Pregunta 2. (6 puntos) Encuentre todos los $x \in (-1, 1)$ tal que

$$3 \ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2\right) - \ln\left((1-x)^2\right) = 0$$

Pregunta 3. Calcule las siguientes integrales

a) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{3^x}{4 + 3^{2x}}dx$

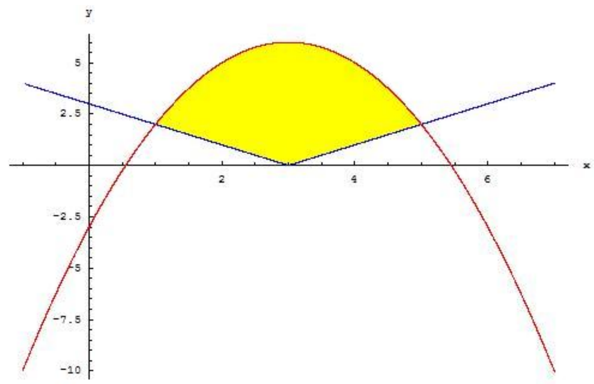
b) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln|x|)^2}$

c) (6 puntos) $\displaystyle\int x e^{x^2-3} dx$

Nota: Si le hace falta puede usar que $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Soluciones

1) La región a rotar se indica a continuación



Buscamos la coordenada x de los puntos de intersección. Tenemos que

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ 3-x & x < 3 \end{cases}$$

Si $x \geq 3$, tenemos que

$$|x-3| = 6-(x-3)^2 \Leftrightarrow x-3 = 6-x^2+6x-9 \Leftrightarrow x^2-5x = 0$$

Entonces $x = 0$ y $x = 5$, pero como $x \geq 3$, tenemos que $x = 5$.
Si $x < 3$, tenemos que

$$|x-3| = 6-(x-3)^2 \Leftrightarrow 3-x = 6-x^2+6x-9 \Leftrightarrow x^2-7x+6 = 0$$

Entonces $x = 1$ y $x = 6$, pero como $x < 3$, tenemos que $x = 1$.
La integral por arandelas es:

$$V = \pi \int_1^5 \left((6-(x-3)^2)^2 - |x-3|^2\right) dx$$

Usando la sustitución $u = x-3$, $du = dx$ se obtiene

$$V = \pi \int_{-2}^2 \left((6-u^2)^2 - |u|^2\right) du$$

y como el integrando es una función par esto se simplifica a

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 \left((6-u^2)^2 - |u|^2\right) du = 2\pi \int_0^2 \left((6-u^2)^2 - u^2\right) du = 2\pi \int_0^2 \left(36 - 12u^2 + u^4 - u^2\right) du \\ &= 2\pi \int_0^2 \left(36 - 13u^2 + u^4\right) du = 2\pi \left(36u - 13\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\Big|_0^2\right) \\ &= 2\pi \left(72 - 13\frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{1312}{15}\pi. \end{aligned}$$

Si no se usa la sustitución también puede usar que $|x-3|^2=(x-3)^2$ y resolver la integral

$$V=\pi\int_1^5 \left((6-(x-3)^2)^2-(x-3)^2\right)dx$$

O también se puede partir el valor absoluto y le quedan dos integrales (esto es más largo):

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^3 \left((6-(x-3)^2)^2-(3-x)^2\right)dx+\pi\int_3^5 \left((6-(x-3)^2)^2-(x-3)^2\right)dx \\ &= \pi\int_1^3 \left(41x^2-30x+x^4-12x^3\right)dx+\pi\int_3^5 \left(41x^2-30x+x^4-12x^3\right)dx \\ &= \frac{656}{15}\pi+\frac{656}{15}\pi=\frac{1312}{15}\pi \end{aligned}$$

El volumen por el método de los cascarones da las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^2 y\,(3+y-(3-y))\,dy+2\pi\int_2^6 y\left(3+\sqrt{6-y}-(3-\sqrt{6-y})\right)dy \\ &= 2\pi\int_0^2 y\,(2y)\,dy+2\pi\int_2^6 y\left(2\sqrt{6-y}\right)dy \\ &= \frac{32}{3}\pi+\frac{384}{5}\pi=\frac{1312}{15}\pi. \end{aligned}$$

2) Sea

$$F(x)=3\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2\right)-\ln\left((1-x)^2\right).$$

Usando dos veces la propiedad $b\ln(a)=\ln(a^b)$, válida para $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3\right)-\ln\left(\left((x+1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)-\ln\left((1-x)^2\right) \\ &= \ln\left(x^2+1\right)-\left\{\ln(x+1)+\ln\left((1-x)^2\right)\right\}. \end{aligned}$$

Ahora usamos la propiedad $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$, válida para $a>0$ y $b>0$, para obtener

$$F(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left((x+1)(1-x)^2\right).$$

A continuación usamos la propiedad $\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, válida para $a>0$ y $b>0$, para obtener

$$F(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)(1-x)^2}\right).$$

Recordamos que queremos resolver $F(x)=0$, es decir,

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)(1-x)^2}\right)=0.$$

Aplicando la función exponencial natural a ambos lados y usando que $e^{\ln(x)}=x$ si $x>0$ y que $e^0=1$, obtenemos

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(1-x)^2}=1\Leftrightarrow x^2+1=(x+1)(1-x)^2,$$

donde usamos que $x \in (-1,1)$ Como $(x+1)(1-x)^2 = x^3 - x^2 - x + 1$, tenemos que

$$x^2 = x^3 - x^2 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 1) = 0$$

Entonces $x = 0$ y nos falta resolver $x^2 - 2x - 1 = 0$. Las soluciones de este último son $x = \sqrt{2} + 1 > 1$ y $x = 1 - \sqrt{2}$. Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = 1 - \sqrt{2}$.

3) a) Sea $I = \int \frac{3^x}{4+3^{2x}} dx = \int \frac{3^x}{4+(3^x)^2} dx$. Usamos la sustitución $u = 3^x$, $du = \ln(3) 3^x dx$, es decir, $\frac{1}{\ln(3)} du = 3^x dx$ para obtener

$$I = \frac{1}{\ln(3)} \int \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{4\ln(3)} \int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2}.$$

Ahora usamos la sustitución $z = \frac{u}{2}$, $dz = \frac{du}{2}$, es decir, $2dz = du$ para obtener

$$I = \frac{2}{4\ln(3)} \int \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2\ln(3)} \arctan z + C = \frac{\arctan\left(\frac{u}{2}\right)}{2\ln(3)} + C = \frac{\arctan\left(\frac{3^x}{2}\right)}{2\ln(3)} + C$$

b) Sea $I = \int \frac{dx}{x(\ln|x|)^2}$. Usamos la sustitución $u = \ln|x|$, $du = \frac{dx}{x}$ para obtener

$$I = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\ln|x|} + C.$$

c) Sea $I = \int x e^{x^2-3} dx$. Usamos la sustitución $u = x^2 - 3$, $du = 2x dx$, es decir, $\frac{1}{2} du = x dx$ para obtener

$$I = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + C$$